Lokální, globální a vázané extrémy funkcí více proměnných – – několik řešených příkladů

1. V R^2 vyšetřete lokální a globální extrémy fce
$$f(x,y) = 12xy - x^2y - xy^2$$

1) fce nenabývá globálních extrémů, neboť:

pro $x=1$ je $\lim\limits_{y\to\pm\infty} f(1,y) = \lim\limits_{y\to\pm\infty} (11y - y^2) = -\infty$

a pro $x=-1$ je $\lim\limits_{y\to\pm\infty} f(-1,y) = \lim\limits_{y\to\pm\infty} (-13y + y^2) = +\infty$

(při „podezření", že fce nemá glob. extrémy se občas zdaří lehce dokázat pomocí „řezů")

2) lokální extrémy fce v R^2:

f má v R^2 spojité parciální derivace druhého řádu, lze tedy hledat lokální extrémy pouze mezi stacionárními body (tj. $\nabla f = \vec{0}$) pomocí „zkoumání" druhého diferenciálu (vyšetření Hessovy matice druhých derivací).

(i)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 12y - 2xy - y^2 = y(12-2x-y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12x - 2xy - x^2 = x(12-2y-x)$$

$\nabla f(x,y) = \vec{0}$ pro body $(0,0), (0,12), (12,0), (4,4)$ – – body podezřelé „z lok. extrému

(ii) Vyšetření lokálních extrémů v „podezřelých" bodech:

Matice druhých derivací
$$D^2(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y, & 12-2x-2y \\ 12-2x-2y, & -2x \end{bmatrix}$$

označíme-li $H(x,y)$ determinant matice druhých derivací („Hessián"), pak:

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} < 0 \quad \Rightarrow$$ v $(0,0)$ není lokální extrém (pro $n=2$ platí i s nulami na hlavní diagonále)

stejně $H(0,12)<0$ i $H(12,0)<0$ $\Rightarrow$ v těchto bodech není lok. extrém

$$H(4,4) = \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} > 0 \quad \Rightarrow$$ v $(4,4)$ je ostré lokální maximum (neboť $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,4)<0$)

(Pozn.: pro $n>2$ – pro posouzení definitnosti matice druhých derivací – Sylvestrovo kritérium)

2. V R^2 vyšetřete globální a lokální extrémy fce
$$f(x,y) = (x-y)^2 + (y-1)^3$$

1) fce nenabývá globálních extrémů v R^2:
neboť, zvolíme-li $y=x$, pak
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,x) = \lim_{x\to\pm\infty} (x-1)^3 = \pm\infty$$

2) lokální extrémy:
f má spojité druhé parc. derivace, hledejme tedy
(i) stacionární body:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2(x-y) + 3(y-1)^2,$$
$$\nabla f(x,y) = \vec{o} \iff (x,y) = (1,1)$$

$$H(1,1) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

tedy, odtud není žádná informace o nabývání lokálního extrému.

Vyšetříme „chování" funkce v okolí bodu $(1,1)$:

$f(1,1) = 0$; vezmeme-li $y = x$, pak $f(x,y) = (x-1)^3$

a pro $x > 1$ je $f(x,x) > 0$ a pro $x < 1$ je $f(x,x) < 0$, tedy, v lib. okolí bodu $(1,1)$ f nabývá hodnot větších i menších než je $f(1,1)$, tedy, f nemá v bodě $(1,1)$ lokální extrém.

③ V R^2 vyšetřete globální a lokální extrémy fce
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y.$$

1) globální extrémy:

pro $y = 0$: $f(x,0) = x^2 \to +\infty$ pro $x \to \pm\infty$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f nemá v R^2 globální maximum

„zdá se", že globální minimum fce bude mít
(f je spojitá, pro (x,y) „vzdalující" se od počátku $f(x,y) \to +\infty$)

zde se snadno ukáže: $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1$,
tedy, globální minimum je v bodě $(x_0,y_0) = (0,1)$ a $f(0,1) = -1$

2) lokální extrémy v R^2

opět, mohou nastat jen ve stacionárních bodech, tj. tam, kde $\nabla f = \vec{o}$, tj.

$$2x = 0 \quad a \quad 2y - 2 = 0,$$

což je pouze v bodě $(0,1)$

(můžete ověřit, že Hessián „funguje")

(pokuste si také představit (bez předchozích úvah v 1)), proč je zde globální minimum.)

(4) Vypočtěte globální extrémy fce
$$f(x,y) = x^2+y^2-2y$$
na množině $M = \{[x,y];\ x^2 \le y \le 4\}$. (Snadný příklad)

1) M je omezená a uzavřená množina v R^2, tedy M je kompaktní, f je na M spojitá, tedy f nabývá na M globálního maxima i minima:

uzavřenost M lze ukázat např. takto:

$M_1 = \{[x,y];\ y \le 4\}$ je uzavřená (vzor při spojitém zobrazení uzavřeného int. $(-\infty, 4\rangle$)

$M_2 = \{[x,y];\ 0 \le y - x^2\}$, – opět, vzor při spojitém zobrazení uzavřeného int. $\langle 0, +\infty)$, tedy M_2 – uzavřená

$M = M_1 \cap M_2$, průnik dvou uzavřených množin je uzavřená množina

omezenost je zřejmá!

2) globální extrémy budou buď ve vnitřních bodech M, t. v $\{[x,y];\ x^2 < y < 4\} = M^0$

nebo na hranici, t. ve

$\partial M = \{[x,y];\ y = x^2,\ x \in \langle -2, 2\rangle\} \cup \{[x,y];\ y = 4,\ x \in \langle -2, 2\rangle\}$

(i) v M^0 – jediný „podezřelý" bod $(0,1)$, zde je (viz příklad 3) glob. minimum v R^2, tedy i v M.

(ii) na hranici:

$y = 4$: $f(x,4) = x^2 + 8$, $x \in \langle -2, 2\rangle$.

„podezřelé body": $[-2,4], [2,4], [0,4]$

(vyšetření extrému fce jedné proměnné

$y=x^2$: $\quad f(x,x^2) = x^4 - x^2$, $\quad x \in \langle -2, 2\rangle$:

nově podezřelé body $(0,0)$ a $\left(\frac{1}{\sqrt2}, +\frac12\right)$ $\left(-\frac{1}{\sqrt2}, +\frac12\right)$

(nulové body derivace $g'(x) = \left(f(x,x^2)\right)' = 2x\,(2x^2-1)$)

Z hodnot v „podezřelých" bodech tedy vidíme:

globální maximum fce na M je v bodech $(-2,4)$ a $(2,4)$,

$f(-2,4) = f(2,4) = 12$.

Poznámka: kdyby bylo úkolem najít globální extrémy dané funkce na množině ∂M, pak by zde tytéž extrémy existovaly (∂M je opět kompaktní množina),

a maximum by bylo opět v bodech $(-2,4)$ a $(2,4)$ a glob. minimum na ∂M by bylo v bodech $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}, +\frac12\right)$ $\left(=-\frac14\right)$

5 (opět snadný příklad) – uvádíme zde jako vzor „návodu"

Vypočtěte globální extrémy fce $f(x,y) = 2xy$ na množině $M = \{[x,y];\ x^2+y^2 \le 4\}$

1. M je kompaktní množina, neboť M je uzavřená (zřejmé) a omezená (stejně jako v příkladu 4) a f je spojitá na M, tedy f nabývá na M globálních extrémů.

2. Kandidáti extrémů na M

(i) vnitřní body: (tj. $\{[x,y];\ x^2+y^2 < 4\}$)

stac. bod je jen $[0,0]$ $\quad (\nabla f(x,y) = 2\,(y,x))$ – podezřelý bod, $f(0,0) = 0$

(ii) <u>vyšetření „podezřelých" bodů na kružnici, tj. na $\partial M = \{[x,y];\ x^2+y^2=4\}$:</u>

tedy: parametrizujeme kružnici $x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ t\in\langle 0,2\pi\rangle$ (např.) a vyšetřujeme extrémy fce jedné proměnné

$$g(t) = 8\sin t\cdot\cos t,\quad t\in\langle 0,2\pi\rangle$$
$$(= 4\sin 2t)$$

podezřelé body: $t=0$, $t=2\pi$ a body, kde $g'(t)=0$, tj. kde $8\cos 2t=0$ pro $t\in\langle 0,2\pi\rangle$, což je pro

$$t=\frac{\pi}{4},\quad t=\frac{\pi}{4}+\pi,\quad t=\frac{3\pi}{4},\quad t=\frac{3\pi}{4}+\pi$$

(tj. pro fci f podezřelé body jsou
$(\sqrt2,\sqrt2)$, $(-\sqrt2,-\sqrt2)$, $(-\sqrt2,\sqrt2)$, $(\sqrt2,-\sqrt2)$)

<u>na kružnici:</u>
maximální hodnota f je v bodech $(\sqrt2,\sqrt2)$ a $(-\sqrt2,-\sqrt2)$ ... 4
minimální hodnota —"— $(-\sqrt2,\sqrt2)$ a $(\sqrt2,-\sqrt2)$ ... -4
$f(0,0)=0$ $\Rightarrow$

glob. maximum nabývá fce v bodech $(\sqrt2,\sqrt2)$ a $(-\sqrt2,-\sqrt2)$,
glob. minimum nabývá fce v bodech $(-\sqrt2,\sqrt2)$ a $(\sqrt2,-\sqrt2)$

(což bylo jistě i „vidět" hned při čtení příkladu)

(iii) <u>Vyšetření chování funkce na kružnici ∂M užitím metody Lagrangeových multiplikátorů</u>

(opět jako návod (takový), i když výsledek už známe)

označme-li $G(x,y) = x^2+y^2-4$, pak
$$\partial M = \{[x,y];\ G(x,y)=0\};$$

je-li tedy $\nabla G(x,y) = 2(x,y) \neq (0,0)$ na ∂M, lze užít nutné podmínky (věta o Lagrangeových multiplikátorech):

Extrém na ∂M fce f může nastat v těch bodech ∂M, kde má řešení soustava

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla G(x,y) \\ G(x,y) = 0 \end{cases}$$

tj. zde:

$$\begin{cases} 2y = 2\lambda x \\ 2x = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

tj. hledáme řešení soustavy rovnic

(1) $y = \lambda x$

(2) $x = \lambda y$

(3) $x^2+y^2 = 4$

(i) jediné řešení (1) (2) je bod $(0,0)$, ale $(0,0)$ nesplňuje (3),

(ii) je-li $x \neq 0$ nebo $y \neq 0$, je i $\lambda \neq 0$, tedy, pokud (x,y) řeší (1), (2), je $x \neq 0$, $y \neq 0$ i $\lambda \neq 0$ a dostaneme

$$\lambda = \frac{y}{x} = \frac{x}{y}, \quad \text{tj. } x^2 = y^2$$

z (3) $\quad 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$, a také tedy $y = \pm\sqrt{2}$

a dostaneme opět podezřelé body $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ a $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, (dále viz (ii))

6 (Trochu obtížnější příklad na užití Lagrangeových multiplikátorů – „obtížnější" ne v teorii, ale v technickém provedení)

Vyšetřete globální extrémy fce $f(x,y) = x^2+2y^2$ na množině $M = \{[x,y];\ x^4+y^4 = 1\}$

(Vázaný extrém)

1) M je kompaktní množina (omezená a uzavřená - obraz uzavřené množiny při spojitém zobrazení), f je spojitá na M, tedy f nabývá na M globálních extrémů

2) Hledání globálních extrémů: - metoda Lagrang. multiplikátorů

$$G(x,y) = x^4+y^4-1, \quad \nabla G(x,y) = 4(x^3,y^3) \neq (0,0) \text{ na } M$$

hledáme (x,y) („podezřelé" body) jako řešení soustavy

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla G(x,y) \\ G(x,y)=0 \end{array} \right., \text{ tj. } \left. \begin{array}{rl} 2x &= 4\lambda x^3 \\ 4y &= 4\lambda y^3 \\ x^4+y^4 &= 1 \end{array} \right\}$$

tedy:

$$\begin{array}{ll} (1) & 2x(1-\lambda 2x^2) = 0 \\ (2) & 4y\cdot(1-\lambda y^2) = 0 \\ (3) & x^4+y^4 = 1 \end{array}$$

1) rovnice (1) (2) řeší bod $(0,0)$, ale ten nesplňuje (3)

2) soustavu řeší body $(0,1)$ $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$

3) je-li $x\neq 0$ i $y \neq 0$, pak i $\lambda \neq 0$ a z (1) a (2) máme:

$$x^2 = \frac{1}{2\lambda}, \quad y^2 = \frac{1}{\lambda} \quad \text{a z (3)} \quad \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2} = 1, \text{ tj. }$$

$$\lambda^2 = \frac{5}{4}, \text{ tj. } \underline{\underline{\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}}} \qquad \left(x^2 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ y^2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

odtud: „podezřelé" body: $A_1\left[\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}\right]$, $A_2\left[\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}\right]$, $A_3\left[-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}\right]$, $A_4\left[-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}\right]$

Vyčíslíme-li hodnoty v podezřelých bodech z bodu 2) a 3), dostaneme: f má glob. minimum v bodech $(1,0)$ a $(-1,0)$ $(=1)$ a glob. maximum v bodech A_i, $i=1,2,3,4$ $(=\sqrt{5})$

④ Vyšetřete globální extrémy funkce
$$f(x,y,z) = xy + x^2$$
na množině $M = \{[x,y,z];\ x^2+y^2+z^2 \le 1 \text{ a } x \ge 0\}$

1) M je kompaktní množina (omezená a uzavřená v R^2)
omezenost – zřejmá
uzavřenost: $M = M_1 \cap M_2$, M_1, M_2 uzavřené,
$M_1 = \{[x,y,z];\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ a $M_2 = \{[x,y,z];\ x \ge 0\}$
f je spojitá na M, tedy f má na M globální extrémy

2) hledání globálních extrémů:
(i) vnitřek M: $M^0 = \{[x,y,z];\ x^2+y^2+z^2 < 1 \text{ a } x > 0\}$
„podezřelé" body: $\nabla f(x,y,z) = (y, x, 2z)$
$\nabla f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0) \notin M^0$,
tedy f nemá v M^0 žádný lokální, a tedy ani globální extrém

(ii) hranice M: $\partial M = (\partial M)_1 \cup (\partial M)_2$
$(\partial M)_1 = \{[x,y,z];\ x = 0 \text{ a } y^2+z^2 < 1\}$
zde $f(0,y,z) = z^2$, $y^2+z^2<1$ ($f(0,y,z) = g(y,z)$ – 2 proměnné)
„podezřelé" body z $(\partial M)_1$ jsou body $(0,y,0)$, $y^2<1$, tedy $y \in (-1,1)$ ~~z~~
$(\nabla g(y,z) = (\nabla f(0,y,z)) = (0, 2z))$

$(\partial M)_2 = \{[x,y,z];\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ x \ge 0\}$
„podezřelé" body – užitím metody Lagrangeových multiplikátorů:
$G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$
$\nabla G(x,y,z) = 2(x,y,z) \ne \vec{o}$ na $(\partial M)_2$,
tedy, hledáme body $(x,y,z) (\in (\partial M)_2)$ tak, aby: $\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla G(x,y,z) \\ \text{a } G(x,y,z) = 0 \end{cases}$:

Řešíme tedy soustavu (pro $x \geq 0$):

$$y = 2\lambda x \quad (1)$$
$$x = 2\lambda y \quad (2)$$
$$2z = 2\lambda z \quad (3)$$
$$x^2+y^2+z^2 = 1 \quad (4)$$

1) $\lambda \neq 0$ (kdyby $\lambda = 0$, pak z (1),(2),(3) plyne, že $x=y=z=0$, ale $(0,0,0) \notin (\partial M)_2$

2) $\underline{x=0} \Rightarrow y=0 \Rightarrow z=\pm 1$ (z (1),(2),(4))
<u>tedy „podezřelé" body jsou $(0,0,1)$ a $(0,0,-1)$</u>

3) $\underline{\text{je-li } x>0}$, pak i $y \neq 0$ a $2\lambda = \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$ (z (1),(2)),
tedy $y^2 = x^2$,
z (3): $(1-\lambda)z = 0$;
buď $z=0$ .. pak z (4) dostaneme „podezřelé" body ($2x^2=1$)
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ a $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

nebo $z \neq 0$, pak $\lambda = -1$, ale v tomto případě rovnice (1)(2) řeší jen $x=0$ a $y=0$ (zde hledáme ale řešení pro $x>0$)

<u>závěr!</u> Na hranici M jsou podezřelé body (globální extrém na M je na hranici ∂M)

$(0,y,0)$ pro $y \in (-1,1)$, $\quad f(0,y,0) = 0$

$(0,0,1)$ a $(0,0,-1)$ $\quad f(0,0,1) = f(0,0,-1) = 1$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ $\quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ $\quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{2}$

Tedy – globální maximum na M fce nabývá
v bodech $(0,0,1)$ a $(0,0,-1)$, $\quad (=1)$
globální minimum v bodě $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ $\left(=-\frac{1}{2}\right)$

<u>Poznámka:</u>

Podezřelé body z extrému na $(\partial M)_2$ lze také hledat takto:

Je-li $x^2+y^2+z^2=1$, $x\ge 0$, pak $z^2 = 1-x^2-y^2$,

f na $(\partial M)_2$ je pak fce dvou proměnných (x,y):

vyšetřujeme funkci $h(x,y) = xy + 1 - x^2 - y^2$ na množině $A = \{[x,y];\ x^2+y^2 \leqq 1,\ x \ge 0\}$

(i) <u>vnitřní body A</u>: $\left(\{[x,y];\ x^2+y^2<1 \text{ a } x>0\} = A^\circ\right)$

podezřelé body: $\nabla h(x,y) = (y-2x,\ x-2y)$

$$\nabla h(x,y) = \vec{o} \iff (x,y) = (0,0) \notin A^\circ$$

(ii) <u>hranice A</u>:

a) $x = 0$, $-1 \le y \le 1$: $h(0,y) = 1-y^2$,

podezřelé body $(0,1)$, $(0,-1)$ a $(0,0)$

$h(0,1) = h(0,-1) = \left(f(0,1,0) = f(0,-1,0)\right) = 0$

$\underline{h(0,0) = 1 \ \left(= f(0,0,1) = f(0,0,-1)\right)}$

b) <u>$x>0$ a $x^2+y^2=1$</u>, pak metodou Lagrangeových multiplikátorů dostaneme:

$G(x,y) = x^2+y^2-1$, $\nabla G(x,y) = 2(x,y) \neq \vec{o}$ (zde)

$$\left.\begin{array}{l} \nabla h = \lambda \nabla G \\ \text{a } G(x,y) = 0 \\ x > 0 \end{array}\right\}: \quad \begin{array}{lll} y - 2x = 2\lambda x & (1) & y = 2x(1+\lambda) \\ x - 2y = 2\lambda y & (2) & x = 2y(1+\lambda) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) & x^2+y^2 = 1 \end{array}$$

Buď $\lambda = -1$, pak $x = 0 = y$, ale pak není splněno (3),

nebo $\lambda \neq -1$, pak opět dostaneme (z (1) a (2)): $x^2 = y^2$ a z (3) podezřelé body $\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)$ a $\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right)$,

dále už zřejmé.

<u>Také</u>: Zde opět lze převést vyšetření extrému na kružnici $x^2+y^2=1$, $x>0$ na vyšetření extrémů fce jedné proměnné například parametrizací kružnice nebo vyjádřením $x = \sqrt{1-y^2}$, $y \in \langle -1, 1\rangle$

(8) Vyšetřete globální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x + y + z$$

na množině $M = \{ [x,y,z] \in R^3;\ x^2+y^2+z^2=5 \text{ a } yz=2 \}$

(vázaný extrém)

1) M je kompaktní – je uzavřená (průnik dvou uzavřených množin) a zřejmě omezená

f je spojitá na M, tedy f na M nabývá globálních extrémů

2) <u>Vyšetření (nalezení) globálních extrémů</u>

opět zde ukážu, jak „fungují" metody Lagrangeových multiplikátorů, ale mnohdy lze řešit problém jednodušeji:

<u>zde asi</u>: globální maximum bude pro $x>0, y>0, z>0$ a díky $yz=2$ dostaneme $y=z=\sqrt{2}$, $x=1$ z $(x^2+y^2+z^2=5)$

t. bod <u>maxima na M</u>: $\underline{(1,\sqrt{2},\sqrt{2})}$ $\quad (f(1,\sqrt{2},\sqrt{2}) = 1+2\sqrt{2})$

globální minimum pro $x<0, y<0, z<0$

a díky podmínkám $yz=2$ a $x^2+y^2+z^2=5$ dostaneme bod

<u>$(-1,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ – zde bude globální minimum</u>

$f(-1,-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -1-2\sqrt{2}$

Vezmeme-li tento příklad jako „cvičení" na užití Lagrang. multiplikátorů, pak budeme postupovat takto:

(i) M je dáno podmínkami

$G_1(x,y,z) = 0$, kde $G_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-5$

$G_2(x,y,z) = 0$, kde $G_2(x,y,z) = yz-2$

metody (LM) lze užít v bodech, kde matice $\begin{pmatrix} \nabla G_1 \\ \nabla G_2 \end{pmatrix}$ má hodnost 2, tj.:

$\begin{pmatrix} \nabla G_1(x,y,z) \\ \nabla G_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\,, & 2y, & 2z \\ 0\,, & z, & y \end{pmatrix}$ má hodnost 2, je-li $x \neq 0$;

pro $x=0$ by byla hodnost < 2 pro $y^2 = z^2$, z $G_2(x,y,z)=0$ (tj. $yz=2$) dostaneme, že toto může nastat jen v bodech $(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, tyto body ale nesplňují podmínku $G_1(x,y,z)=0$ (tj. $x^2+y^2+z^2=5$), tedy, matice $\begin{pmatrix} \nabla G_1 \\ \nabla G_2 \end{pmatrix}$ má v M maximální hodnost.

(ii) Body „podezřelé" z extrému hledáme jako řešení soustavy

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= \lambda \nabla G_1(x,y,z) + \mu \nabla G_2(x,y,z) \\ G_1(x,y,z) &= 0 \\ G_2(x,y,z) &= 0\,, \end{aligned}$$

tedy řešíme soustavu:

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x && (1) \\ 1 &= 2\lambda y + \mu z && (2) \\ 1 &= 2\lambda z + \mu y && (3) \\ x^2+y^2+z^2 &= 5 \\ yz &= 2 \end{aligned}$$

z (1): $x \neq 0$ a $\lambda \neq 0$; z (2) a (3): $2\lambda(y-z) = \mu(y-z)$

odtud: pro $\underline{y=z}$ a podmínek $yz=2$ a $x^2+y^2+z^2=5$ dostaneme body $\underline{(1,\sqrt{2},\sqrt{2}),\ (-1,\sqrt{2},\sqrt{2}),\ (1,-\sqrt{2},-\sqrt{2}),\ (-1,-\sqrt{2},-\sqrt{2})}$,

pro $y \neq z$ soustava nemá řešení.

Závěr: (vyčíslení hodnot v „podezřelých" bodech)

na M f nabývá maxima v bodě $(1,\sqrt{2},\sqrt{2})$, $f(1,\sqrt{2},\sqrt{2}) = 1+2\sqrt{2}$,
a minima v bodě $(-1,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $f(-1,-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -(1+2\sqrt{2})$.